5/10/2016

Σύστημα πραγματικών αριθμών

Έχουμε ένα σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με 2 πράξεις

Την πρόσθεση $(+)$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto x+y$$

Τον πολλαπλασιασμό $(\cdot)$ $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto x\cdot y$$

(ή xy)

και μια αυστηρή διάταξη $<$ ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα

(R_1) $x+y=y+x$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (αντιμεταθετική)

(R_2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ (προσεταιριστική)

(R_3) $\exists\, 0\in\mathbb{R}$ ώστε $x+0=x$ $\forall x\in\mathbb{R}$
(ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης)

(R_4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists x'\in\mathbb{R}$ ώστε $x+x'=0$
(αποδεικνύεται ότι με δεδομένο το x το x' είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $-x$)

Οι ιδιότητες $(R_1)-(R_4)$ αφορούν την πρόσθεση

(R5) $xy = yx \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ (αντιμεταθετική)

(R6) $(xy)z = x(yz) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(R7) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ με $1 \neq 0$ ώστε $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(R8) $\forall x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ $\exists\, x' \in \mathbb{R}$ με $x \cdot x' = 1$.
(αποδεικνύεται ότι με δεδομένο το x, το x' είναι μοναδικό και συμβολίζεται με x^{-1} ή $\frac{1}{x}$)

(R9) $x(y+z) = xy + xz \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

(R10) $\forall x,y \in \mathbb{R}$ ισχύει ακριβώς μια από τις τρεις
$x<y$, $x=y$, $y<x$

R(11) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$
αν $x<y$ και $y<z$ τότε $x<z$

R(12) Αν $x,y,z \in \mathbb{R}$
με $x<y$ τότε $x+z<y+z$

R(13) Αν $x,y,z \in \mathbb{R}$
και ισχύουν $x<y$ και $0<z$ τότε $xz<yz$

R(14) Αξίωμα της πληρότητας

Συμβολισμοί

α) $x<y \iff y>x$

β) $x \leq y \iff x<y$ ή $x=y$

Πρόταση

Ισχύουν τα εξής.

α) Αν $xy = xz$ και $x \neq 0$ τότε $y = z$

β) $x \cdot 0 = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

γ) $(-\alpha)\cdot\beta = -(\alpha\cdot\beta)$, $\alpha(-\beta) = -\alpha\cdot\beta$, $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\cdot\beta$

δ) Για κάθε $\alpha \neq 0$ ισχύει $\alpha\cdot\alpha > 0$

ε) Ισχύει $1 > 0$

Προκύπτουν εύκολα από τα αξιώματα.

Απόδειξη του (α).

Εφόσον $x \neq 0$ υπάρχει $x^{-1} \in \mathbb{R}$ ώστε $\underset{\overset{\|}{x^{-1}\cdot x}}{x\cdot x^{-1}} = 1$

$$x^{-1}(x\cdot y) = x^{-1}(x\cdot z)$$
$$\Rightarrow (x^{-1}\cdot x)\,y = (x^{-1}\cdot x)\,z$$
$$\Rightarrow (x\cdot x^{-1})\,y = (x\cdot x^{-1})\,z$$
$$\Rightarrow 1\cdot y = 1\cdot z \Rightarrow y = z$$

Ορισμός - Συμβολισμός

$2 = 1+1$

$3 = 2+1$

$4 = 3+1$

$5 = 4+1$

$\vdots$

$10 = 9+1$

$\overline{\alpha\beta} = \alpha \cdot 10 + \beta$

όπου $\alpha \in \{1, \dots, 9\}$

$\beta \in \{0, \dots, 9\}$

<u>Ορισμός</u>

$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Για $\beta \neq 0$ $\quad \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \beta^{-1}$

<u>Σημείωση</u>

$x \leq x$ είναι αληθής (διότι $x = x$)

$0 \leq 1$ είναι αληθής (διότι $0 < 1$)

Ενώ οι σχέσεις $1 < 0$

και $1 \leq 0$ είναι ψευδείς.

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$

$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\}$

$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$

$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\}$

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$. $\quad (\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \quad x > \alpha\}$

$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \quad x \geq \alpha\}$

$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \quad x < \alpha\}$

$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \quad x \leq \alpha\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Ορισμός : Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Ένας πραγματικός αριθμός M λέγεται άνω φράγμα του A αν ισχύει $x \leq M$ για κάθε $x \in A$

β) Ένα σύνολο A λέγεται άνω φραγμένο αν έχει (ένα τουλάχιστον) άνω φράγμα

γ) Ένας πραγματικός αριθμός m λέγεται κάτω φράγμα του συνόλου A αν ισχύει $m \leq x$ $\forall x \in A$

δ) Ένα σύνολο A λέγεται κάτω φραγμένο αν έχει (ένα τουλάχιστον) κάτω φράγμα.

ε) Το A λέγεται φραγμένο αν είναι άνω και κάτω φραγμένο

Παράδειγμα

$A = [3,7]$

↳ Το σύνολο A είναι άνω φραγμένο (το 7 είναι άνω φράγμα του) (διότι $x \leq 7$ $\forall x \in A$)

Το 9 είναι επίσης άνω φράγμα του A εφόσον $x \leq 9$ $\forall x \in A$

Το σύνολο A είναι κάτω φραγμένο (ο αριθμός 3 είναι ένα κάτω φράγμα του A διότι $3 \leq x$ $\forall x \in A$ Επίσης ο αριθμός 2 είναι επίσης κάτω φράγμα του A.

→ Τα ίδια ακριβώς ισχύουν για το σύνολο $B = (3,7)$

<u>Γενικά</u> : α) Αν ο Μ είναι άνω φράγμα του Α και $M < M'$ τότε ο M' είναι επίσης άνω φράγμα του Α.

β) Αν ο αριθμός m είναι κάτω φράγμα του Α και $m' < m$ τότε ο m' είναι κάτω φράγμα του Α.

<u>Παραδείγματα</u>.

- $A = (3, +\infty)$ δεν είναι άνω φραγμένο είναι όμως κάτω φραγμένο.
- $B = (-\infty, 5]$ δεν είναι κάτω φραγμένο ενώ είναι άνω φραγμένο.
- Το $\mathbb{R}$ δεν είναι ούτε κάτω ούτε άνω φραγμένο.

<u>Ορισμός</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Ένα $\alpha \in A$ λέγεται μέγιστο στοιχείο του Α αν ισχύει $x \leq \alpha$ $\forall x \in A$.

(ii) Ένα $\beta \in A$ λέγεται ελάχιστο στοιχείο του Α αν ισχύει $\beta \leq x$ για κάθε $x \in A$.

Παραδείγματα

$A=[3,7]$

↳ έχει μέγιστο στοιχείο το 7 και ελάχιστο στοιχείο το 3

$B=(3,7)$

↳ δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο

$\Gamma=[4,6)$

↳ έχει ελάχιστο στοιχείο το 4 ενώ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

$\Delta=(4,6]$

↳ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, αλλά έχει μέγιστο στοιχείο το 6.

Παρατήρηση

- Το μέγιστο στοιχείο ενός συνόλου (αν υπάρχει) είναι μοναδικό. Αν υπάρχει, θα το συμβολίζουμε με $\max A$

- Το ελάχιστο στοιχείο ενός συνόλου (αν υπάρχει) είναι μοναδικό και θα το συμβολίζουμε με $\min A$.

<u>Ορισμός</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\theta \in \mathbb{R}$

Το θ λέγεται <u>ελάχιστο</u> <u>άνω φράγμα</u> (ή supremum) του συνόλου A αν ισχύουν τα εξής:

(i) Το θ είναι άνω φράγμα του A ($x \leq \theta \ \forall x \in A$)

(ii) Αν θ' είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου A, τότε $\theta \leq \theta'$

Παρατήρηση

Αν το σύνολο A έχει ελάχιστο άνω φράγμα τότε αυτό είναι μοναδικό. Έστω β_1, β_2 δυο ελάχιστα άνω φράγματα του A.

Εφόσον το β_2 είναι άνω φράγμα του A (από το (i) του ορισμού) από το (ii) για το β_1 συμπεραίνουμε ότι $\beta_1 \leq \beta_2$. Εφόσον το β_1 είναι άνω φράγμα του A και β_2 ελάχιστο άνω φράγμα του A προκύπτει $\beta_2 \leq \beta_1$. Επομένως $\beta_1 = \beta_2$.

Συμβολισμός.

Αν το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα συμβολίζουμε με $\sup A$ το (μοναδικό) ελάχιστο άνω φράγμα του A.

Παρατήρηση.

Αν το σύνολο A έχει μέγιστο στοιχείο έστω $a = \max A$. Τότε $a = \sup A$.

Το (i) του ορισμού του supremum είναι προφανές. Επίσης αν β' οποιοδήποτε άνω φράγμα του A τότε (εφόσον $a \in A$) θα ισχύει $a \leq \beta'$ δηλ. ισχύει η (ii) του ορισμού.

Παραδείγματα

Για $A = [3, 7]$

$\max A = 7$ άρα $\sup A = 7$

Για $B = [3,7)$ το B δεν έχει μέγιστο στοιχείο όμως το B έχει supremum και $\sup B = 7$.

(R14) Αξίωμα της πληρότητας

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει <u>ελάχιστο</u> <u>άνω φράγμα</u>

<u>Ορισμός</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\gamma \in \mathbb{R}$.
Το γ λέγεται <u>μέγιστο κάτω φράγμα</u> ή <u>infimum</u> του συνόλου A αν ισχύουν τα εξής

(i) Το γ είναι κάτω φράγμα του A (δηλ. $\gamma \leq x \ \forall x \in A$)

(ii) Αν γ' είναι ένα κάτω φράγμα του A τότε $\gamma' \leq \gamma$

<u>Παρατήρηση</u>
Αν ένα σύνολο έχει μέγιστο κάτω φράγμα τότε αυτό είναι μοναδικό
(Απόδειξη: Όμοια με την απόδειξη για ελαχ. άνω φράγμα).
Το συμβολίζουμε με $\inf A$

<u>Πρόταση</u>
Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο σύνολο έχει infimum.

Απόδειξη

Έστω A ένα μη κενό και κάτω φραγμένο σύνολο
άρα $\exists\, m \in \mathbb{R}$ ώστε $m \le x \quad \forall x \in A$.

$\Rightarrow \quad -x \le -m$ για κάθε $x \in A$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $B = \{-x \quad x \in A\}$ αυτό
είναι μη κενό και άνω φραγμένο.
Από το αξίωμα της πληρότητας το B έχει
supremum.

Έστω $\theta = \sup B$
Θα δείξουμε ότι το $-\theta$ είναι το infimum του A.
Εφόσον $\theta = \sup B$ το θ είναι άνω φράγμα του B.

άρα $\quad -x \le \theta \quad \forall x \in A$

$\Rightarrow \quad -\theta \le x \quad \forall x \in A$

δηλ. ο αριθμός $-\theta$ είναι κάτω φράγμα του A.
Έστω τώρα c ένα κάτω φράγμα του A
Τότε $c \le x \quad \forall x \in A \Rightarrow -x \le -c \quad \forall x \in A$
Άρα ο αριθμός $-c$ είναι άνω φράγμα του B

Εφόσον $\theta = \sup B$ συμπεραίνουμε ότι $\theta \le -c$
Άρα $\quad c \le -\theta$.

Επομένως $-\theta = \inf A$

Πρόταση Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα (Τ.Α.Ε.Ι)

(i) $a = \sup A$

(ii) α) Το a είναι άνω φράγμα του A

β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $x > a - \varepsilon$

Απόδειξη
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Εφόσον $a = \sup A$ το a είναι άνω φράγμα του A
άρα το α) ισχύει.

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το β) (για να καταλήξουμε σε άτοπο).
Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει
$x \leq a - \varepsilon$
Άρα $a - \varepsilon$ άνω φράγμα του A
Εφόσον $a = \sup A$ $\quad a \leq a - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq 0$ άτοπο

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Από το α) το a είναι άνω φράγμα του A
Έστω b ένα άνω φράγμα του A και θα δ.ο. $a \leq b$.

Αν αυτό δεν ισχύει τότε $a > b$ Θέτοντας $\varepsilon = a - b$
έχουμε $\varepsilon > 0$
Τότε από το β) υπάρχει $x \in A$ με $x > a - \varepsilon$
$= a - (a - b)$
$= b$ άτοπο

(αφού το B είναι άνω φράγμα του A)

Επομένως $a = \sup A$.